Ένατο (ολικό) τεστ Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι
Διάρκεια δυόμιση ώρες

Θέμα 1

Αν $\mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ $(z_1, z_2 \neq 0)$.

Θέμα 2

(i) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια: $\lim\limits_{z\to 0} z^z$ και $\lim\limits_{z\to\infty} |e^z|$.

(ii) Να βρείτε τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία η συνάρτηση $f(z) = \log\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη.

Θέμα 3

(i) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma (z^2 + 3\sqrt[4]{z})dz$, όπου γ ο θετικά προσανατολισμένος μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το 0, και $\sqrt[4]{z}$ εκείνος ο κλάδος της 4ης ρίζας του z για τον οποίο ισχύει $\sqrt[4]{1} = -i$.

(ii) Έστω f ακέραια, n φυσικός αριθμός και z ένας μιγαδικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a, b > 0$ ισχύει:

$$\frac{\int_0^{2\pi} e^{-int} f(z + ae^{it})dt}{\int_0^{2\pi} e^{-int} f(z + be^{it})dt} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Θέμα 4

(i) Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f που πληρούν το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$f''(z) - f(z) = 0, \;\; f(0) = 0. \;\; f'(0) = 1.$$

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = z^2 - 3z + 3 + i$ και οι θετικά προσανατολισμένες περιφέρειες $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ των κύκλων $\partial D(0,1)$, $\partial D(0,2)$ και $\partial D(0,3)$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3} p(z)dz$

(b) $\displaystyle\int_{2\gamma_2} \frac{dz}{p(z)}$

(c) $\displaystyle\int_{\gamma_3^-} \frac{p(z)}{z-2}dz$

Θέμα 5

(i) Να χαρακτηριστεί το σημείο $z_0 = 1$ για τη συνάρτηση $f(z) := \dfrac{\sin(\pi z)}{2e^{z-1} - z^2 - 1}$, ως προς την ανωμαλία του.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μη μηδενική ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\lim_n sin\left(\frac{2020}{z_n}\right) = 1 - i.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!